11 TODO

Matematika G3 – Differenciálegyenletek
Utoljára frissítve: 2025. november 16.

11.1. Elméleti áttekintő

Definíció 11.1 : Egzakt differenciálegyenlet

A $P(x;y)\,\mathrm{d}x + Q(x;y)\,\mathrm{d}y = 0$ differenciálegyenlet – ahol $P;Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények – egzaktnak nevezzük, ha teljesül az alábbi feltétel:

$$\frac{\partial P(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}.$$

Ekkor $\exists F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, melyre igaz, hogy:

$$\frac{\partial F(x;y)}{\partial x} = P(x;y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial F(x;y)}{\partial y} = Q(x;y)$$
$$\frac{\partial F(x;y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial F(x;y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x = 0$$
$$F(x;y) = C$$

Oldjuk meg az alábbi egzakt differenciálegyenletet!

$$\underbrace{(2xy + y)}_{P(x;y)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{(x^2 + x)}_{Q(x;y)}\,\mathrm{d}y = 0$$

Ellenőrizzük, hogy valóban egzakt-e a differenciálegyenlet:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 2x + 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2x + 1 \end{aligned}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

tehát egzakt. Integráljuk P-t x szerint, Q-t pedig y szerint:

$$F(x;y) = \int P\,\mathrm{d}x = \int (2xy + y)\,\mathrm{d}x = x^2y + xy + C_y(y),$$
$$F(x;y) = \int Q\,\mathrm{d}y = \int (x^2 + x)\,\mathrm{d}y = x^2y + xy + C_x(x),$$

ahol $C_y(y)$ és $C_x(x)$ rendre y-tól és x-tól függő függvények, jelen esetben nullának választhatóak. A megoldás tehát:

$$x^2y + xy = C.$$

Az előző példát más módszerekkel is megoldhattuk volna, például szeparábilis differenciálegyenletként:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\ln(x^2+x)+K \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x^2+x}.$$

Differenciálegyenlet egzakttá tevése

Előfordulhat, hogy a $P(x;y)\,\mathrm{d}x + Q(x;y)\,\mathrm{d}y = 0$ differenciálegyenlet nem egzakt, de integráló tényező segítségével egzakttá tehető.

Tegyük fel, hogy $\exists M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, hogy $M(x;y)P(x;y)\,\mathrm{d}x + M(x;y)Q(x;y)\,\mathrm{d}y = 0$ differenciálegyenlet már egzakt, azaz:

$$\frac{\partial MP}{\partial y} = \frac{\partial MQ}{\partial x}$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}P + M\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}Q + M\frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$Q\frac{\partial M}{\partial x} - P\frac{\partial M}{\partial y} + M\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

Tegyük fel, hogy M egyváltozós:

$!M(x)$, ekkor a differenciálegyenlet az alábbi alakra redukálódik:

$$Q\frac{\partial M}{\partial x} + M\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

Ez már $M(x)$-re szeparábilis:

$$\frac{1}{M}\,\mathrm{d}M = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x$$
$$\ln M = \int \frac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad M(x) = Ce^{\int \frac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q}\,\mathrm{d}x}.$$

Itt C tetszőlegesen megválasztható, ezért célszerű 1-nek választani.

$!M(y)$, ebben az esetben pedig a differenciálegyenlet az alábbi alakot ölit:

$$P\frac{\partial M}{\partial y} + M\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

Ez már $M(y)$-re szeparábilis:

$$\frac{1}{M}\,\mathrm{d}M = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$
$$\ln M = \int \frac{\partial_y Q - \partial_x P}{P}\,\mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad M(y) = Ce^{\int \frac{\partial_y Q - \partial_x P}{P}\,\mathrm{d}y}.$$

C ebben az esetben is tetszőlegesen megválasztható.

Előfordulhat, hogy a differenciálegyenlet nem egzakt, és egyváltozós multiplikátorral sem tehető azzá. Ilyen például:

$$(x^2 + xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 + xy)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Tegyük egzakttá az alábbi differenciálegyenlet!

$$(y^3 + y)x^2\,\mathrm{d}x + \frac{2y^3 + 3y^2 + 2y + 1}{3}\,x^3\,\mathrm{d}y = 0$$

A parciális deriváltak:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2(3y^2 + 1) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = x^2(2y^3 + 3y^2 + 2y + 1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

A differenciálegyenlet valóban nem egzakt. Viszont megfigyelhetjük, hogy mind a parciális deriváltakban, mind $P(x; y)$-ben szerepel egy x^2-es szorzó. Ezek az y-tól függő multiplikátoros képletben kiejtik egymást:

$$\ln M(y) = \int \frac{\partial_y Q - \partial_x P}{P}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2y^3 + 2y}{y^3 + y}\,\mathrm{d}y = \int 2\,\mathrm{d}y = 2y(+C) \quad \Rightarrow \quad M(y) = e^{2y}.$$

Ezek után a differenciálegyenlet már egzakt:

$$\underbrace{e^{2y}(y^3 + y)x^2}_{P'}\,\mathrm{d}x + \underbrace{e^{2y}\frac{2y^3 + 3y^2 + 2y + 1}{3}x^3}_{Q'}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Ellenőrizzük a parciális deriváltakat:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P'}{\partial y} = x^2\,e^{2y}\left[2(y^3 + y) + 3y^2 + 1\right] \\ \dfrac{\partial Q'}{\partial x} = x^2\,e^{2y}\,(2y^3 + 3y^2 + 2y + 1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P'}{\partial y} = \frac{\partial Q'}{\partial x}.$$

Most már integrálhatjuk P'-t x szerint, Q'-t pedig y szerint:

$$F(x; y) = \int P'\,\mathrm{d}x = \int e^{2y}(y^3 + y)x^2\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2y}\,x^3}{3}\left(y^3 + y\right) + C_y(y),$$
$$F(x; y) = \int Q'\,\mathrm{d}y = \frac{x^3}{3}\int e^{2y}(2y^3 + 3y^2 + 2y + 1)\,\mathrm{d}y = \frac{e^{2y}\,x^3}{3}\left(y^3 + y\right) + C_x(x).$$

Ahol $C_y(y)$ és $C_x(x)$ rendre y-tól és x-tól függő függvények, jelen esetben nullának választhatóak. A megoldás tehát:

$$\frac{e^{2y}\,x^3}{3}\left(y^3 + y\right) = C.$$

Definíció 11.2 : Bernoulli-féle differenciálegyenlet

Az olyan egyenleteket, melyek

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^n(x)$$

alakban írhatóak fel, és $p; q : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, valamint $n \notin \{0; 1\}$, Bernoulli-féle differenciálegyenletnek nevezzük.

Bernoulli-féle differenciálegyenlet megoldása

Az ilyen típusú differenciálegyenletek nem lineárisak, de az alábbi helyettesítéssel lineárissá tehetőek:

$$z = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad z' = (1-n)y^{-n}y' \quad \Rightarrow \quad y'\,y^{-n} = \frac{y^n}{1-n}.$$

A helyettesítés után az egyenlet:

$$y'\,y^{-n} + p(x)y^{1-n} = \frac{q(x)}{1-n}\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x),$$

amely már lineáris, megoldható a korábban tanult módszerekkel.

Oldjuk meg az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenletet:

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2y^3, \quad x > 0$$

Jelen esetben $n = 3$, éljünk a $z = y^{1-3} = y^{-2}$ helyettesítéssel, ekkor

$$z' = -2y^{-3}y' \quad \Rightarrow \quad y'y^3 = -\frac{z'}{2}$$

Helyettesítsük be az egyenletbe:

$$y'y^{-3} + \frac{2}{x}y^{-2} = x^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{z'}{2} + \frac{2}{x}z = x^2 \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{4}{x}z = -2x^2$$

Homogén megoldás z-re:

$$z_h = Ce^{\int 4/x\,\mathrm{d}x} = Cx^4.$$

Partikuláris megoldás z-re:

$$z_p = x^4 \int \frac{-2x^2}{x^4}\,\mathrm{d}x = x^4 \int -2x^{-2}\,\mathrm{d}x = x^4\left(2x^{-1} + \underbrace{K}_{=0}\right) = 2x^3.$$

Általános megoldás:

$$z = z_h + z_p = Cx^4 + 2x^3 \quad \Rightarrow \quad y = z^{-1/2} = \left(Cx^4 + 2x^3\right)^{-1/2}.$$

Definíció 11.3 : Ricatti-féle differenciálegyenletek

A Ricatti-típusú diffegyenletek elsőrendű, másodfokú, nemlineáris egyenletek, amelyek az alábbi alakban írhatóak fel:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^2(x) + h(x).$$

Ha $q(x) = 0$, akkor a Ricatti-egyenlet lineáris.

Ha $h(x) = 0$, akkor Bernoulli-típusú egyenletet kapunk.

Ricatti-féle differenciálegyenlet megoldása

Egy Ricatti-egyenlet általában nem oldható meg integrálással. A standard módszer akkor működik közvetlenül, ha ismerjük az egyenlet y_p partikuláris megoldását.

Bernoulli-típusra redukálás, majd linearizálás

Alkalmazzuk az alábbi eltolást:

$$y = y_p + z.$$

Ekkor, felhasználva hogy

$$y_p' + py_p = qy_p^2 + h,$$

az egyenlet z-re:

$$z' + pz = 2qy_pz + qz^2 \quad \Leftrightarrow \quad z' = (2qy_p - p)z + qz^2.$$

Az egyenlet már Bernoulli-típusú, használhatjuk a korábban tanult helyettesítést:

$$z = \frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad z' = -\frac{u'}{u^2}$$

Behelyettesítve:

$$-\frac{u'}{u^2} = (2qy_p - p)\frac{1}{u} + q\frac{1}{u^2} \quad \Rightarrow \quad -u' = (2qy_p - p)u + q.$$

Az egyenlet már lineáris, megoldható a korábban tanult módszerekkel:

$$u' + \alpha u = \beta, \qquad \text{, ahol} \begin{cases} \alpha := 2q\,y_p - p, \\ \beta := -q \end{cases}$$

Egylépéses linearizálás

Alkalmazzuk az alábbi helyettesítést:

$$y = \frac{1}{u} + y_p \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{u'}{u^2} + y_p'.$$

Ezt visszahelyettesítve ugyanarra az alakra jutnánk, mint az előző módszer során.

Oldjuk meg az alábbi Ricatti-féle differenciálegyenletet:

$$y' + e^x y = e^{2x} y^2 - e^{-x}, \qquad y_p = e^{-x}$$

Bernoulli-típusra redukálás, majd linearizálás

Eltolás a partikuláris megoldással:

$$y = y_p + z = e^{-x} + z, \qquad y' = -e^{-x} + z'.$$

Behelyettesítve az egyenletbe:

$$-e^{-x} + z' + e^x(e^{-x} + z) = e^{2x}(e^{-x} + z)^2 - e^{-x}.$$

Az egyszerűsítés után:

$$z' = e^x z + e^{2x} z^2.$$

Most linearizáljuk az egyenletet $u = 1/z$ helyettesítéssel:

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = \frac{e^x}{u} + \frac{e^{2x}}{u^2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{u'}{u^2} = \frac{e^x}{u} + \frac{e^{2x}}{u^2} \quad \Rightarrow \quad u' + e^x u = -e^{2x}.$$

A linearizált egyenlet homogén megoldása:

$$u_p(x) = Ce^{-\int e^x \,\mathrm{d}x} = C \underbrace{e^{-e^x}}_{U(x)}.$$

Az általános megoldás az eddigiekhez képest egy más módszerrel is megkapható. Oszszuk el az egyenlet mindkét oldalát $U(x)$-szel:

$$e^{e^x} u' + e^x e^{e^x} u = -e^{2x} e^{e^x}.$$

Az egyenlet bal oldalán $U(x) \cdot u'(x)$ szorzatfüggvény deriváltja található, vagyis:

$$\left(e^{e^x} u\right)' = -e^{2x} e^{e^x} \quad \Rightarrow \quad e^{e^x} u = -\int e^{2x} e^{e^x} \,\mathrm{d}x = -\int e^{e^x + 2x} \,\mathrm{d}x$$

Éljünk a $t = e^{e^x}$ helyettesítéssel, ekkor $x = \ln \ln t$, $e^x = \ln t$, $\mathrm{d}t = e^{e^x} \cdot e^x \,\mathrm{d}x = e^{e^x + 1}$.

$$e^{e^x} u = -\int e^{2x} e^{e^x} \frac{\mathrm{d}t}{e^{e^x + 1}} = -\int e^x \,\mathrm{d}t = -\int \ln t \,\mathrm{d}t = -t \ln t + t = -e^{e^x} e^x + e^{e^x} + C$$

Az általános megoldás u-ra:

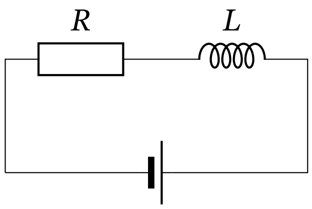
$$u = e^{-e^x} \cdot \left[e^{e^x}(1 - e^x) + C\right] = 1 - e^x + Ce^{-e^x}.$$

Visszahelyettesítve z-re, majd y-ra:

$$z = \frac{1}{u} = \frac{1}{1 - e^x + Ce^{-e^x}} \quad \Rightarrow \quad y = e^{-x} + z = e^{-x} + \frac{1}{1 - e^x + Ce^{-e^x}}.$$

11.2. Feladatok

1. Egy soros RL-körre konstans u_0 feszültséget kapcsolunk. Adja meg az áram időfüggvényét!



$$u_R = R \cdot i$$
$$u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

2. Oldja meg az alábbi egzakt, illetve egyakttá tehető differenciálegyenleteket!

   a) $(2x + 2\sin y)\,\mathrm{d}x + (2x\cos y - \sin y)\,\mathrm{d}y = 0,$

   b) $(1 - xy)\,\mathrm{d}x + (xy - x^2)\,\mathrm{d}y = 0,$

   c) $\big(\ln(y^2+1)\big)\,\mathrm{d}x + \dfrac{2y(x-1)}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = 0,$

   d) $(e^{-y})\,\mathrm{d}x + \big(x\,e^{-y} - 2y\,e^{-2y}\big)\,\mathrm{d}y = 0.$

3. Oldja meg az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{3y}{x} = x^4 y^{1/3}$$

4. Oldja meg az alábbi Ricatti féle differenciálegyenletet!

$$y' = xy^2 - (4 - 2x^2)y + x^3 + 4x + 1$$