9. hét - Gyakorlat

Szöveges feladatok

9. feladat

9. 100 kg 10 %-os sóoldatot tartalmazó edénybe másodpercenként 10 L tiszta víz áramlik be. Mikor lesz a sóoldat koncentrációja 5 %-os, ha a keveredés azonnal megtörténik, és ugyanilyen sebességgel folyik ki az edényből a keverék?

$x(t)$ ~ só tömeg $\quad x(0) = 10\,kg \quad x(t_1) = 5\,kg$

$\dot{x}_{be} = \dot{V}\rho_{be} \quad \dot{V} = 10\,L/s \quad \rho_{be} = 0 \quad \dot{x}_{be} = 0$

$\dot{x}_{ki}(t) = \dot{V}\rho_{ki}(t) = \dot{V}\dfrac{x(t)}{V_0} \quad \dot{x}_{ki} = 0{,}1\,x(t)$

Anyagmérleg: $\dot{x} = \dot{x}_{be} - \dot{x}_{ki}(t)$

$$\frac{dx}{-0{,}1x} = dt \Rightarrow \ln|x| = -0{,}1t + k \Rightarrow x = Ce^{-0{,}1t}$$

$x(0) = 10 \Rightarrow C = 10$

$x(t_1) = 5 \Rightarrow 5 = 10e^{-0{,}1t_1} \Rightarrow t_1 = \dfrac{1}{-0{,}1}\ln\dfrac{5}{10} = -10\ln\dfrac{1}{2} = 10\ln 2 = 6{,}93\,s$

2. feladat

2. 10 L vizet tartalmazó edénybe literenként 0,3 kg sót tartalmazó oldat folyik be 2 L/min sebességgel. Az edényben a folyadék azonnal elkeveredik, majd ugyanilyen sebességgel kifolyik. Mennyi só lesz 5 min múlva az edényben?

$x(t)$ ~ só tömege $\quad V_0 = 10\,L$

$\dot{x}_{be} = \rho_{be}\cdot\dot{V} = 0{,}3\cdot 2 = 0{,}6\,kg/min$

$\dot{x}_{ki} = \rho_{ki}\cdot\dot{V} = \dfrac{x}{V_0}\cdot\dot{V} = 0{,}2\,x(t)$

$\dot{x}(t) = \dot{x}_{be} - \dot{x}_{ki} = 0{,}6 - 0{,}2x(t)$ ~ anyagmérleg

$$\frac{dx}{x-3} = 0{,}2dt \Rightarrow \ln|x-3| = -0{,}2 \Rightarrow x - 3 = Ce^{-0{,}2t}$$

$x(t) = 3 + Ce^{-0{,}2t} = 3 - 3e^{-0{,}2t}$

Elsőrendű, lineáris DE

- általános alak: $y' + p(x)\,y = q(x)$
- integrációs faktoros megoldás:

! $\mu(x)$, melyre teljesül, hogy $\mu(x)\cdot\left(y'(x) + p(x)y(x)\right) = \left(\mu(x)y(x)\right)'$

$$\cancel{y'(x)\mu(x)} + p(x)\cancel{y(x)}\mu(x) = \left(y(x)\mu(x)\right)' = \cancel{y'(x)\mu(x)} + \cancel{y(x)}\mu'(x)$$

$$p(x)\mu(x) = \mu'(x)$$

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x) \overset{\int}{\Rightarrow} \ln\mu(x) = \int p(x)\,dx$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

A kapott $\mu(x)$-szel beszorozzuk a DE mindkét oldalát:

$$\left(y(x)\mu(x)\right)' = \mu(x)q(x) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)\,dx$$

1. feladat

a) $y' - \frac{y}{x} = xe^x$

$$p(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

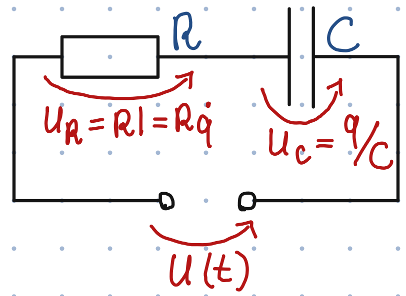
$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}xe^x$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = e^x$$

$$\frac{y}{x} = \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$y = xe^x + Cx$$

RC - áramkör analógia



$$R = \frac{U}{I} \Rightarrow [R] = \frac{V}{A} = \Omega$$

$$C = \frac{q}{U} \quad [C] = \frac{C}{V} = \frac{As}{V} = \frac{s}{\Omega}$$

Kirchhoff: $R\dot{q} + q/C = U(t) \qquad q(0) = q_0$

Elnevezések: ! $T = RC$ ~ időállandó, valóban s lesz a mértékegység

Ha $U(t) = 0 \Rightarrow \qquad q_h = q_0 e^{-t/T}$

↳ ha q_0 a kezdőtöltés, a rendszert pedig magára hagyjuk, a kondenzátor fokozatosan kisül

Ha $U(t) = U_0 \quad \Rightarrow \qquad q_p = C\ _0$

↳ állandósult állapotban a kondenzátor megtelik

Megoldás $\mu(x)$-es módszerrel: $\dot{q} + \frac{q}{T} = \frac{CU_0}{T}$

$$p(t) = \frac{1}{T} \Rightarrow \int p(t)\,dt = t/T \Rightarrow \mu(t) = e^{t/T}$$

$$q e^{t/T} = \int \frac{CE_0}{T} e^{t/T}\,dt = C\ _0 e^{t/T} + K$$

$$q(t) = CU_0 + K e^{-t/T}$$

$$q(0) = q_0 \Rightarrow K = q_0 - CU_0$$

$$q(t) = CU_0 + (q_0 - CU_0)\, e^{-t/T}$$

- konstans variálásos mo.:

$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow y = y_h + y_{ih}$

↳ homogén megoldásrész: $y' = p(x)y$

↳ inhomogén megoldásrész: $C \to C(x)$

a, $y' - \frac{y}{x} = xe^x$

homogén: $y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = Cx$

inhomogén: $\begin{cases} y = C(x) \cdot x \\ y' = C'(x) \cdot x + C(x) \end{cases}$

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = xe^x$$

$$C'(x) = e^x \Rightarrow C(x) = e^x \Rightarrow y_{ih} = xe^x$$

összegezve: $y = y_h + y_{ih} = Cx + xe^x$

$\mu(x)$ a homogén megoldás reciproka (konstans nélkül)

b, $y' + 2xy = -xe^{-x^2}$

$\ln \mu(x) = \int 2x\,dx = x^2 \Rightarrow \mu(x) = e^{x^2}$

$$(ye^{x^2})' = e^{x^2}(-xe^{-x^2})$$

$$ye^{x^2} = \int -x\,dx = \frac{-x^2}{2} + C$$

$$y = e^{-x^2} \cdot \left(C - \frac{x^2}{2}\right)$$

c) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$

$$\int \frac{1-2x}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\,dx = -\frac{1}{x} - 2\ln x$$

$$\mu(x) = e^{\cdots} = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

$$y\,\frac{e^{-1/x}}{x^2} = \int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx = e^{-1/x} + C$$

$$y = x^2\left(1 + Ce^{1/x}\right)$$

d) $y' + y\cos x = \cos x \sin x \qquad y(0) = 1$

$$\mu(x) = e^{\sin x}$$

$$y e^{\sin x} = \int e^{\sin x} \sin x \cos x\,dx = \int e^t \cdot t\,dt = e^t(t-1) + C$$

$t = \sin x$ $\qquad$ $f = t \quad g' = e^t$

$dx = \frac{dt}{\cos x}$ $\qquad$ $f' = 1 \quad g = e^t$

$$y e^{\sin x} = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C$$

$$y = (\sin x - 1) + Ce^{-\sin x} \qquad C = 2$$

e) $y'(1+x^2) + 2xy = \tan x \qquad y(0) = 2$

$\mu(x) = 1 + x^2 \qquad \mu'(x) = 2x$

$$y(1+x^2) = \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$y = \frac{C - \ln|\cos x|}{1+x^2} \qquad C = 2$$

Hiányos másodrendű DE

- általános esetben: $y'' = f(x;y;y')$

- $y'' = f(x)$ ~ y és y' hiányos (a,b)
  ↳ 2x integrálunk
- $y'' = f(x;y)$ ~ y hiányos (c,e)
  ↳ $p(x) = y'(x)$ helyettesítés, akkor $p'(x) = y''(x)$
- $y'' = f(y;y')$ ~ x hiányos (d,f)
  ↳ $P(y) = y'$ helyettesítés, akkor $y'' = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \partial_y P \cdot P$

4. feladat

a) $y'' = 6x + \sin x$ (y' és y hiányos)

$$y' = 3x^2 - \cos x + C_1$$

$$y = x^3 - \sin x + C_1 x + C_2$$

b) $y'' x^2 + \ln x = 1$ (y' és y hiányos)

$$y'' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y' = \int \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C_1$$

$f = \ln x$ $\quad g' = -1/x^2$

$f' = 1/x$ $\quad g = +1/x$

$$y = \int \frac{\ln x}{x} + C_1\, dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C_1 x + C_2$$

c) $y'' - \frac{x}{x^2-1} y' = 0 \quad x > 1$ (y hiányos)

$y' = p \quad y'' = p'$

$p' - \frac{x}{x^2-1} p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{x\,dx}{x^2-1} \Rightarrow \ln p = \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + k$

$p = C_1\sqrt{x^2-1} \Rightarrow y = \int C_1 \sqrt{x^2-1}\,dx = \int C_1 \sinh^2 t\,dt =$

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \qquad x = \cosh t$

$\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t \qquad dx = \sinh t\,dt$

$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \qquad \sinh^2 t = \frac{\cosh 2t - 1}{2}$

$= \frac{C_1}{2} \int \cosh 2t - 1\,dt = \frac{C_1}{2}\left(\frac{\sinh 2t}{2} - t\right) + C_2$

$\frac{\sinh 2t}{2} = \sinh t \cosh t = \sqrt{x^2-1}\,x$

$= \frac{C_1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcosh} x\right) + C_2$

e) $y''^2 = y' \qquad y' > 0$ (x és y hiányos)

$y' = p \quad y'' = p'$

$p'^2 = p \Rightarrow p' = \sqrt{p} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{p}} = dx$

$2\sqrt{p} = x + C_1 \Rightarrow p = \frac{(x+C_1)^2}{4}$

$y = \int p\,dx = \int \frac{(x+C_1)^2}{4}\,dx = \frac{(x+C_1)^3}{12} + C_2$

d) $y''(1+y^2) = y y'^2$ (x hiányos)

$P(y) = y' \qquad P'(y) = \partial_y P \cdot P$

$(1+y^2)\frac{dP}{dy}P = yP \xrightarrow{P\equiv 0} y = C$

$P \neq 0$

$\frac{dP}{P} = \frac{y\,dy}{1+y^2} \Rightarrow \ln P = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + K \Rightarrow P = C_1\sqrt{1+y^2}$

$\frac{dy}{dx} = C_1\sqrt{1+y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = C_1 dx \Rightarrow \text{arsinh}\, y = C_1 x + C_2$

$y(x) = \text{arsinh}(C_1 x + C_2)$

f) $y'' y = 1 + y'^2 \qquad \overset{(1)}{y(0) = 1} \qquad \overset{(2)}{y'(0) = 0}$ (x-hiányos)

$y' = P \qquad y'' = \partial_y P \cdot P$

$P\frac{dP}{dy} y = 1 + P^2 \Rightarrow \frac{P\,dP}{1+P^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+P^2) = \ln|y| + K$

$1 + P^2 = C^2 y^2 \Rightarrow y'^2 = C^2 y^2 - 1 \overset{(1)(2)}{\Rightarrow} C = 1 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{y^2-1}$

$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \pm dx \Rightarrow \text{arcosh}\, y = \pm x + K \overset{(1)}{\Rightarrow} K = 0$

$\text{arcosh}\, y = \pm x \Rightarrow y(x) = \cosh x$

3. feladat

Egy testet függőlegesen hajítunk lefelé v0 kezdeti sebességgel. Határozza meg a mozgás sebességének változását, amennyiben a testre csak a nehézségi erő hat, valamint a levegő fékezőereje a sebességgel egyenesen arányos!

Legyen $\downarrow$ a pozitív irány. Ekkor a testre ható erők:

- nehézségi: $+mg$
- közegellenállás: $-kv$

$$\left.\begin{array}{l} +mg \\ -kv \end{array}\right\} \sum F = ma = m\dot{v}$$

$$m\dot{v} = mg - kv \quad \Rightarrow \quad \dot{v} + \frac{k}{m} v = g$$

$$v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty) e^{-t/T} \qquad T = \frac{m}{k} \qquad v_\infty = Tg$$

Levezetve: $p(t) = \frac{k}{m} = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{t/T}$

$$\mu v = \int g e^{t/T} dt = gT e^{t/T} + C$$

$$v e^{t/T} = gT e^{t/T} + C \qquad v(0) = v_0 \Rightarrow C = v_0 - gT$$

$$v(t) = gT + (v_0 - gT) e^{-t/T}$$