4.1. Felszín

a) $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid $z = 1$ és $z = 4$ síkok közé eső része

A megadott forásparaboloid az $z = f(x) = x^2$ függvény z tengely körüli forgatásával kapott felület, paraméterezése tehát:

$$\boldsymbol{\varrho}(s;t) = \begin{bmatrix} s\cos t \\ s\sin t \\ s^2 \end{bmatrix}, \qquad s \in [1;2], \qquad t \in [0;2\pi].$$

A parciális deriváltak, és a felületi normális:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2s \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -s\sin t \\ s\cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -2s^2\cos t \\ -2s^2\sin t \\ s \end{bmatrix}.$$

A keresett felszín:

$$\begin{aligned} A &= \int_S \mathrm{d}S = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \|\boldsymbol{n}\| \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{4s^4 + s^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\ &= 2\pi \int_1^2 \sqrt{4s^4 + s^2}\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_1^2 s\sqrt{4s^2+1}\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{8}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{u_1}^{u_2} = \left[\frac{\pi(4s^2+1)^{3/2}}{6}\right]_1^2 = \frac{\pi}{6}\cdot\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right) \approx 4{,}9094 \end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{\varrho}(s;t) = (e^s\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (e^s\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (s)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $s \in (-\infty;0]$, $t \in [0;2\pi]$

A parcális deriváltak, és a felületi normális:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} = \begin{bmatrix} e^s\cos t \\ e^s\sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -e^s\sin t \\ e^s\cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -e^s\cos t \\ -e^s\sin t \\ e^{2s} \end{bmatrix}$$

A keresett felszín:

$$\begin{aligned} A &= \int_S \mathrm{d}S = \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2s} + e^{4s}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_{-\infty}^0 e^s\sqrt{1+e^{2s}}\,\mathrm{d}s \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\pi \int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \cosh^2 v\,\mathrm{d}v = 2\pi \int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \frac{1+\cosh 2v}{2}\,\mathrm{d}v \\ &= 2\pi\left[\frac{v}{2} + \frac{\sinh 2v}{4}\right]_0^{\operatorname{arsinh} 1} = \pi \operatorname{arsinh} 1 + \sqrt{2}\pi \approx 7{,}2118 \end{aligned}$$

4.2. Skalármező felületi integrálja

a) $\varphi(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$, az egységgömb $z > 0$ részén

Az egységgömb paraméterezése:

$$\boldsymbol{\varrho}(s;t) = \begin{bmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{bmatrix}, \qquad s \in [0;\pi/2], \qquad t \in [0;2\pi], \qquad \boldsymbol{n} = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} \right\| = \sin s.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\varphi(s;t) = (\sin s \cos t)^2 + (\sin s \sin t)^2 = \sin^2 s\,(\cos^2 t + \sin^2 t) = \sin^2 s$$

Az integrál:

$$\int_S \varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin^2 s \sin s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 s)\sin s\,\mathrm{d}s$$
$$= 2\pi \int_0^1 (1-u^2)\,\mathrm{d}u = 2\pi \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}$$

b) $\psi(\boldsymbol{r}) = x+y+z$, az $x+2y+4z=4$ sík első térnyolcadba tartozó részén

Rendezzük a sír egyenletét $z = 4-2x-2y$ alakra.

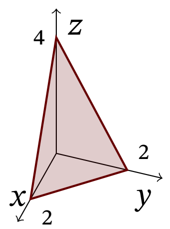
A felületi normális nagysága:

$$\|\boldsymbol{n}\| = \sqrt{1+(\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$$

A függvény átparaméterezése:

$$f(x;y;z(x;y)) = x+y+4-2x-2y = 4-x-y$$

A tartomány paraméterezése:



$y \in [0;2]$

$x \in [0;y-2]$

Az integrál:

$$\int_S g\,\mathrm{d}S = \int_0^2\int_0^{y-2} 3(4-x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_0^2 \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_0^{y-2} \mathrm{d}y$$
$$= 3\int_0^2 \left(4(y-2) - \frac{(y-2)^2}{2} - y(y-2)\right)\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\frac{-9y^2}{2} + 24y - 30\right)\mathrm{d}y$$
$$= \left[\frac{-3y^3}{2} + 12y^2 - 30y\right]_0^2 = -12+48-60 = -24$$

4.3. Vektormező skalárértékű felületi integrálja

a) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (x+y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}+(x-y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}+(z^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $\varrho(s;t) = (s+t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}+(s-t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}+(s^2-t^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $(s;t) \in [0;1]^2$

A parciális deriváltak és a felületi normális:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2s \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2t \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \varrho}{\partial s} \times \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \begin{bmatrix} 2(s-t) \\ 2(s+t) \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\boldsymbol{u}(\varrho(s;t)) = \begin{bmatrix} 2\,s \\ 2\,t \\ (s^2-t^2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,s \\ 2\,t \\ s^4 - 2\,s^2\,t^2 + t^4 \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \int_S \langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} 2\,s \\ 2\,t \\ s^4 - 2\,s^2\,t^2 + t^4 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} 2(s-t) \\ 2(s+t) \\ -2 \end{bmatrix} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \int_0^1 4s^2 + 4t^2 - 2s^4 + 4s^2t^2 - 2t^4 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{5} + \frac{4}{9} - \frac{2}{5} = \frac{104}{45} \approx 2{,}3111 \end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (y^2+z^2)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x^2+z^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x^2+y^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $r = 2$ sugarú, $x = 2$ síkon lévő körön

A felület paraméterezése és a felületi normális:

$$\varrho(s;t) = \begin{bmatrix} 2 \\ s\cos t \\ s\sin t \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} s \in [0;2], \\ t \in [0;2\pi], \end{matrix} \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \varrho}{\partial s} \times \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -s\sin t \\ s\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\boldsymbol{v}(\varrho(s;t)) = \begin{bmatrix} s^2\cos^2 t + s^2\sin^2 t \\ 4 + s^2\cos^2 t \\ 4 + s^2\sin^2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 \\ 4 + s^2\cos^2 t \\ 4 + s^2\sin^2 t \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \int_S \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}); \mathrm{d}\mathbf{S} \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \begin{bmatrix} s^2 \\ 4 + s^2\cos^2 t \\ 4 + s^2\sin^2 t \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 s^3 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 2^4 \,\mathrm{d}t \\ &= 16\pi \approx 50{,}2655 \end{aligned}$$

4.4. Vektormező vektorértékű felületi integrálja

Adja meg a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (-y)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z)\,\hat{\boldsymbol{k}}$ vektormező $\boldsymbol{\varrho}(s;t) = (s+2t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (s-t)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $s \in [0;3]$, $t \in [0;1]$ felületen vett vektorértékű integrálját! A normális irányítottsága legyen kifelé mutató!

A parciális deriváltak és a felületi normális:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varrho}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A függvény átparaméterezése:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varrho}(s;t)) = \begin{bmatrix} s+2t \\ -t \\ s-t \end{bmatrix}.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^3 \begin{bmatrix} s+2t \\ -t \\ s-t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \int_0^3 \begin{bmatrix} 2t-3s \\ -t-2s \\ 5t+3s \end{bmatrix} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{bmatrix} 2(1/2)3 - 3(9/2) \\ -(1/2)3 - 2(9/2) \\ 5(1/2)3 + 3(9/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21/2 \\ -21/2 \\ 21 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$