11. gyakorlat

Irányment deriválás

↳ Definíció szerint: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\underline{x}+\underline{h}) - f(\underline{x})}{h}$

ahol $|\underline{h}| = 1$! egységhosszú irányvektor

↳ Egyszerűbb kiszámolni a gradiens segítségével:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial e} = \langle \underline{e} ; \operatorname{grad} f \rangle}$$

általános $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ esetre!

$$= e_1 \frac{\partial f}{\partial x} + e_2 \frac{\partial f}{\partial y} \left(+ e_3 \frac{\partial f}{\partial z} + \dots \right)$$

Ha létezik és véges!

2 változós esetben

$\underline{e} = (e_1, e_2) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ahol α az x-től mért szög

Totálisan diffható:
↳ minden parc. ∃
↳ független az iránytól
↳ folytonos ⟹ tot. diffh!

PL

F1 $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 4y^4$ $P_0 = (1,1)$

$\alpha = 45°$

$\underline{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6xy + 16y^3$

$\operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy + 16y^3 \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \langle \underline{e}, \operatorname{grad} f \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3x^2 - 3y^2 - 6xy + 16y^3\right) = \underline{\underline{\frac{10\sqrt{2}}{2}}}$$

F2

$$f(x,y) = \ln(x^2 + xy) \qquad \alpha = 150^\circ$$

$$\underline{e} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right]$$

Hol vannak azon pontok ebben az irányban ahol nem létezik a derivált?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + xy}(2x + y) = \frac{2x+y}{x^2+xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial e} = f'_\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{2x+y}{x^2+xy} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+xy} = \frac{x - \sqrt{3}(2x+y)}{2x^2+2xy}$$

Ennek végesnek kell lennie

azaz $2x^2 + 2xy \neq 0$

$$2x(x+y) = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ egyenes} \\ y = -x \text{ egyenes} \end{array}\right\}$$

Itt maga a fgv sincs értelmezve!

az értelmezési tartományán mindenhol ~~ah~~ ~~ahol~~ létezik az iránymenti derivált

F3

$$f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)} - \cancel{ax}\, z$$

$$P_0 = (1, 0, 1)$$

$$\underline{v} = (3, 2, -5) \Rightarrow \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$$

$$\underline{e_v} = \left(\frac{3}{\sqrt{38}};\ \frac{2}{\sqrt{38}};\ \frac{-5}{\sqrt{38}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

$$\operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} -2x\, e^{-(x^2+y^2)} \\ -2y\, e^{-(x^2+y^2)} \\ 1 \end{bmatrix}\Bigg|_{P_0} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\frac{2}{e} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}\Big|_{P_0} = \underline{e}_v \cdot \operatorname{grad} f|_{P_0} = \underline{\underline{-\frac{2}{e} \cdot \frac{3}{\sqrt{38}} + \frac{5}{\sqrt{38}}}}$$

Magasabbrendű ~~parciális~~/iránymenti deriváltal

$$\Downarrow \quad \frac{\partial f}{\partial e} = \langle \underline{e}; \operatorname{grad} f \rangle = e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\Downarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial e^2} = \langle \underline{e}; \underbrace{\operatorname{grad}(\langle e; \operatorname{grad} f \rangle)} \rangle$$

$$\operatorname{grad} \frac{\partial f}{\partial e} = \begin{bmatrix} e_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + e_y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ e_x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + e_y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Ezt visszahelyettesítve:

$\Downarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e^2} = e_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + e_x e_y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + e_y e_x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + e_y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

amennyiben folytonos
akkor ez a kettő
megegyezik

↳ Meg lehet figyelni:

ha $\underline{v}_1 = (1, 0) \Rightarrow e_x = 1;\ e_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$\underline{v}_2 = (0, 1) \Rightarrow e_x = 0;\ e_y = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

F4

$$f(x,y) = x^4 y + y^3 x^2 \qquad P(1,1)$$
$$\alpha = 45^\circ$$

$$e = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$e_x^2 = \frac{1}{2} ; \; e_y^2 = \frac{1}{2} ; \; e_x e_y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 y + 2y^3 x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 x^2 + x^4$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 12x^2 y + 2y^3 = 14 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 4x^3 + 6y^2 x = 10 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6yx^2 = 6 \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e^2} = \frac{1}{2} \cdot 14 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 6$$
$$= 7 + 10 + 3 = \underline{\underline{20}}$$

F5 Három változó esetén:

$$f(x,y,z) = \left(xyz + x^2y^2z^2 + \cancel{x^3y^3z^3}\right) \sqrt{14}$$

$$P(1,1,1) ; \; v_e = (1,2,3) \Rightarrow \sqrt{14}$$

$$\underline{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} ; \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{14}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cancel{\sqrt{14}} \cdot \begin{bmatrix} yz + 2xy^2z^2 \\ xz + 2x^2yz^2 \\ xy + 2x^2y^2z \end{bmatrix} =$$

$$= yz + 2xy^2z^2 + 2xz + 4x^2yz^2 + 3xy + 6x^2y^2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e^2} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2y^2z^2 + 2z + 8xyz^2 + 3y + 12xy^2z \\ z + 4xyz^2 + 3x + 8x^2z^2 + 12x^2yz \\ y + 4xy^2z + 2x + 8x^2yz + 6x^2y^2 \end{bmatrix}$$

$$= \; . \; . \; . \; . \; .$$

Sokkal bonyolultabb!!

Geometriai alkalmazás $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) \Rightarrow$ 3D **felület!**

↳ érintő egyenes, adott irányból

$$\frac{x-x_0}{e_x} = \frac{y-y_0}{e_y} = \frac{z-z_0}{f'_\alpha}$$

ahol $P(x_0, y_0, \cancel{z_0})$ adott pont

$z_0 = f(x_0, y_0)$

$f'_\alpha = \frac{\partial f}{\partial e}$ ahol e/α jelöli ki az adott irányt!

ha parciális pl. $e = (1, 0, 0)$

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{z-z_0}{f'_x} \Rightarrow f'_x(x-x_0) = z-z_0$$

Az analógia

$$\boxed{m(x-x_0) = f_x - f_{x_0}}$$

F6

$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$P_0(0, 1)$ $\qquad x_0 = 0;$

$\alpha = 60° \quad \Longrightarrow \quad y_0 = 1$

$\underline{\underline{z_0}} = f(0,1) = 0$

$e = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$f'_\alpha = \underline{e} \cdot \text{grad} f \Big|_{P_0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y^2}\Big|_{P_0} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2+y^2}\Big|_{P_0} = 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{z}{\sqrt{3}}}$$

Érintősík

↳ 1D kiterjesztése: $(y-y_0) = \overset{y'|_{x_0}}{m}(x-x_0)$

$$\Downarrow$$

$$(z-z_0) = \underline{\text{grad}}\, f|_{P_0} \cdot \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

Az érintősík független az iránytól!
azt csak a felületből kimutató
normális (gradiens) adja meg

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) = z - z_0}$$

$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}}$ 3D sík egyenlet:

$$\boxed{\underline{n}\cdot\underline{x} = \underline{n}\cdot x_0}$$

ahol n a normális

$\underline{n}(\underline{x}-\underline{x}_0) = 0$ $\Rightarrow$ felületi normálvektor

alakból felírható

a fenti egyenletből:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

$\underline{n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{bmatrix}$ ez befelé mutat $\underline{n} = \begin{bmatrix} -\partial f/\partial x \\ -\partial f/\partial y \\ 1 \end{bmatrix}$ kifelé

F7 $\quad f(x,y) = \sin xy \qquad x_0 = \pi/3$

$y_0 = 2$

$z_0 = f(x_0, y_0) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

1. Érintősík egyenlete:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \cos(xy) = 2 \cdot -\frac{1}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \cos(x,y) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{6}}}$$

$$\boxed{-1\left(x - \pi/3\right) - \frac{\pi}{6}(y-2) = \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \quad : S$$

2. Felületi normális

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ -\pi/6 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

$\Downarrow$

Másik megközelítés:

$$\boxed{f(x,y) = z} \Rightarrow f(x,y) - z = 0 = g(x,y,z)$$

3 változós fgv!

ennek a gradiense!

$$\underline{\underline{\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x} = \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \\ \frac{\partial g}{\partial z} = \end{array} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

F8 Melyek a $z = 2x^2 + 5y^2 - 3x + 2y - 1$ felület azon pontjai, ahol az érintősík párhuzamos a $2x - y + 5z - 25 = 0$ síkkal!

nf: $(2, -1, 5) \Rightarrow \boxed{\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -1\right)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3 = -\frac{2}{5} \Rightarrow 4x = \frac{13}{5} \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{13}{20}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 10y + 2 = \frac{1}{5} \Rightarrow 10y = -\frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{y_0 = \frac{-9}{50}}$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) \dots$$

Implicit függvény

$f(x,y) = z$ nem írható fel; z-re nem fejezhető ki.

Ekkor az adott parciális deriválthoz úgy kell deriválni, hogy a belső fgv deriváltja legyen

$$\boxed{e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} = xyz}$$

~~$\frac{\partial f}{\partial z}$~~ $\frac{\partial f}{\partial x} = ?$

- $\frac{\partial f}{\partial x}$: $ye^{xy} + e^{yz} \cdot y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + e^{xz} \cdot z + e^{xz} \cdot x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$

$$= yz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

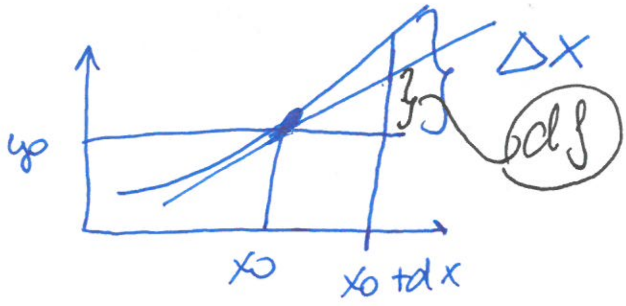
Átrendezni:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(ye^{yz} + xe^{xz} - xy\right) = yz - ze^{xz} - ye^{xy}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - ze^{xz} - ye^{xy}}{ye^{yz} + xe^{xz} - yx}}$$

Teljes differenciál

Egy változós esetben:



ha dx kicsi

azaz $x \approx x_0$

lineárisan közelíthetem:

df : a lineáris (deriváltos) közelítésből adódó eltérés

Többváltozós esetben: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

kis változás

$$df = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\, dy + \dots$$

F9 $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ $\quad P(x_0, y_0)$; $Q(1,2)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(P/Q)\, dx + \frac{\partial f}{\partial x}(P/Q)\, dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2y^2} \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2}$$

P) $$df = \frac{y_0}{1+x_0^2y_0^2}\, dx + \cancel{\partial f} \frac{x_0}{1+x_0^2y_0^2}\, dy$$

Q $\Rightarrow$ $$\boxed{df} = \frac{2}{1+4}\, dx + \frac{1}{1+4}\, dy = \boxed{\frac{2}{5}\, dx + \frac{1}{5}\, dy}$$

F10 Egy henger sugarát 1%, magasságát 2% hibával mérjük. Mennyi a térfogat mérésének relatív hibája

$$\boxed{V = r^2\pi \cdot m}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2r\pi m$$

$$\frac{\partial V}{\partial m} = r^2\pi$$

$$|dV| = |2r\pi m \cdot dr + r^2\pi\, dm|$$

$$\left|\frac{dV}{V}\right| = \left| 2\frac{dr}{r} + \frac{dm}{m} \right| \le 2 \cdot 1\% + 2\% = \underline{\underline{4\%}}$$

a sugármérés rel. hibája

a magasságmérés hibája

Jakobi mátrix

- ha $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú fgv. $\Rightarrow \boxed{\text{grad} f}$ tartalmazza az összes parc. deriváltat

- ha $\boxed{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$\to$ elemei $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú skalár fgvek!

Ezek gradiensét is definiálhatjuk:

$$\Downarrow \quad J = \begin{pmatrix} \text{grad} f_1 \\ \text{grad} f_2 \end{pmatrix} \ldots$$

azaz:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \ldots & & & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

F11

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z \sin x \\ z^2 + z \sin y \end{pmatrix} \qquad \boxed{J_{2\times 3}}$$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$J = \begin{pmatrix} 2x + z\cos x & 2y & \sin x \\ 0 & z\cos y & 2z + \sin y \end{pmatrix}$$