3 Lineáris egyenletrendszerek

Matematika G2 – Lineáris algebra
Utoljára frissítve: 2025. március 2.

3.1. Elméleti Áttekintő

Az m egyenletből és n ismeretlenből álló lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

ahol a_{ij} az együtthatókat, b_j a konstansokat, x_j pedig az ismeretleneket jelöli.

Egy lineáris egyenletrendszer felírható $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ alakban, ahol $\mathbf{A}$ az együttható mátrix, $\boldsymbol{x}$ az ismeretlenek vektora, $\boldsymbol{b}$ pedig a konstans vektor.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

Tétel 3.1: LER megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele

Az $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $\operatorname{rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{rg}(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$, ahol az $(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$ mátrixot kibővített mátrixnak nevezzük.

A feltétel mátrixosan:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right].$$

Definíció 3.1: Homogén lineáris egyenletrendszer

Az $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lineáris egyenletrendszer homogénnek mondjuk, ha $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

Ha $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, akkor a lineáris egyenletrendszer inhomogén.

A feltételből következik, hogy homogén lineáris egyenletrendszer ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$) mindig megoldható, hiszen az együttható mátrixból és egy nullvektorból képzett kibővített mátrix rangja mindig meg fog egyezni az együttható mátrix rangjával.

Lineáris egyenletrendszer csoportosítása:

- A LER **megoldható**, ha létezik megoldása.
- A LER **ellentmondó**, ha nincs megoldása.
- A LER **határozott**, ha csupán egyetlen megoldása van.
- A LER **határozatlan**, ha végtelen sok megoldása van.

A megoldások vizsgálata:

Megoldás akkor létetik, ha $\boldsymbol{b}$ előállítható $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, azaz ha $\operatorname{rg}\mathbf{A} = \operatorname{rg}(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$.

Ha $\operatorname{rg}\mathbf{A} \neq \operatorname{rg}(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

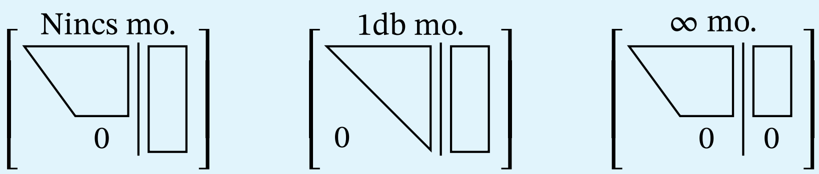
Ha $\operatorname{rg} A < n$, vagyis az együttható mátrix rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Az $\mathbf{A}$ mátrix rangja segítségével meghatározható, hogy hány paramétert kell bevezetnünk a megoldás megadásához:

$$p = n - \operatorname{rg}\mathbf{A}, \text{ ahol } p \text{ a paraméterek száma.}$$

Megoldási módszerek:

1. **Mátrixinverz módszer**: ha az $\mathbf{A}$ mátrix reguláris, akkor invertálható és $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.
2. **Cramer-szabály**: ha az $\mathbf{A}$ mátrix reguláris, akkor az együtthatók az alábbi módon számíthatóak:
$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}},$$
ahol az $\mathbf{A}_i$ mátrixot úgy képezzük, hogy az i-edik oszlopába $\boldsymbol{b}$ vektort írjuk be.
3. **Gauss-elimináció**: elemi átalakításokkal (sorműveletekkel) átalakítjuk a kibővített mátrixot.
$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \square & \square & \cdots & \square & \square \\ 0 & \square & \cdots & \square & \square \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \circ & \circ \end{array}\right]$$
Célunk: felső háromszögmátrix alakra hozni a kibővített mátrixot.

A megoldások száma:



3.2. Feladatok

1. Adott egy lineáris egyenletrendszer **A** mátrix típusa, rangja, illetve a kibővített mátrix rangja. Határozza meg az egyenletrendszer megoldásainak számát!

$\mathbf{A}$	$\mathrm{rg}\,\mathbf{A}$	$\mathrm{rg}(\mathbf{A}\vert\boldsymbol{b})$
4×3	3	4
3×3	2	2
6×8	6	6
8×6	6	6
3×2	0	0

2. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert mátrixinverz módszerrel!

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 6 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

3. Vezesse vissza az alábbi egyenletet lineáris egyenletrendszerre, majd oldja meg mátrixinverz módszerrel!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{B} + 2\boldsymbol{x}$$

4. Cramer-szabály segítségével oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

5. Határozza meg $x_1 - x_2$ értékét!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

6. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

7. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval!

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

8. Oldja meg azt a lineáris egyenletrendszert, melynek a kibővített mátrixa $(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$ alakú!

$$(\mathbf{A}|\boldsymbol{b}) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 & -8 & 0 & 10 \\ 2 & 2 & -3 & -1 & 4 & 17 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ 3 & 3 & 6 & 9 & 8 & 15 \end{array}\right]$$

9. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

10. Oldja meg azt a homogén lineáris egyenletrendszert, amelynek a együtthatóit az $\mathbf{A}$ mátrix tartalmazza!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

11. Az egyenletrendszer megoldása nélkül állapítsa meg, hogy csak a triviális megoldás létezik, vagy van nem triviális megoldás is!

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

12. Adja meg C értékét, hogy megoldható legyen az egyenletrendszer!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = C \end{cases}$$

13. Az egyenletrendszer megoldása nélkül állapítsa meg, hogy csak a triviális megoldás létezik, vagy van nem triviális megoldás is!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 6x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_3 - 7x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

14. Az u és v paraméterek függvényében hány megoldása van az egyenletrendszernek, ha a kibővített mátrix $(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$ alakú?

$$(\mathbf{A}|\boldsymbol{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & u & 2 & 2 \\ 1 & 9 & -5 & v \end{array}\right]$$