MATEMATIKA G2

MÁTRIXOK I.

1. Feladat

a)

$\underline{v}_1 = (x_1 ; 1 ; z_1)$

$\underline{v}_2 = (x_2 ; 1 ; z_2)$

Összeadásra:

$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (x_1 + x_2 ; 2 ; z_1 + z_2)$ ↯

Kivezet a struktúrából, így nem alkot vektorteret!

1. Feladat

b)

$\underline{v}_1 = (x_1 ; 0 ; z_1)$

$\underline{v}_2 = (x_2 ; 0 ; z_2)$

Összeadásra:

$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (x_1 + x_2 ; 0 ; z_1 + z_2)$ ✓

Benne maradt a Struktúrában.

Skalárral való szorzás

$\lambda \underline{v}_1 = (\lambda x_1 ; 0 ; \lambda z_1)$ ✓

Benne maradt a struktúrában.

+ -ra
- disztributív ✓
- asszociatív ✓
- zérus elem ✓
- inverz elem ✓

λ -ra

$$(\alpha + \beta)\underline{v}_1 = \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \\ \alpha z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ 0 \\ \beta z_1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\alpha(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \\ \alpha z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha x_2 \\ 0 \\ \alpha z_2 \end{bmatrix} \checkmark$$

1. Feladat

c)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$a \neq 0$, mert harmadfokú!

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Nem, mert

$$ax^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 + (-ax^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2) =$$

$$= (b_1 + b_2)x^2 + (c_1 + c_2)x + (d_1 + d_2)$$ Nem harmadfokú!

Módosíthatjuk, hogy jó legyen:

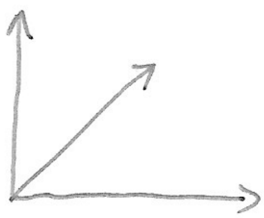
Legfeljebb harmadfokú polinomok

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$a, b, c, d = 0$

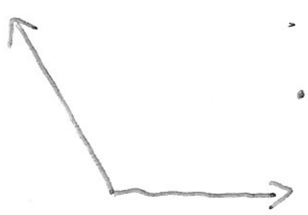
2. Feladat

a)



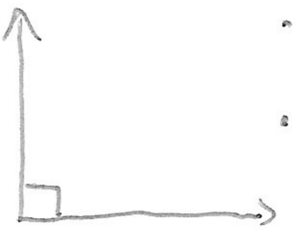
- Generátor r.
- Nem alkot bázist

b)



- Generátor r.
- Bázist alkot

c)

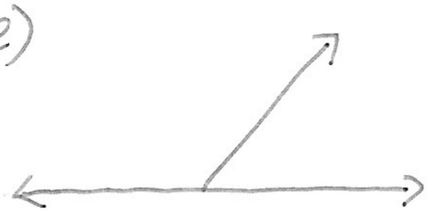


- Generátor r.
- Bázist alkot

d)

- Nem Gen. r.
- Nem alkot b.

e)



- Generátor rendszer.
- Bázist alkot

3. Feladat

Vizsgálni kell, hogy lineárisan függetlenek-e

G1-es módszer: Vegyesszorzat

Ha vegyesszorzat nem egyenlő 0-val, akkor lineárisan független, mert kifeszít egy paralelopipedont!

$$\langle \underline{v}_1 ; (\underline{v}_2 \times \underline{v}_3) \rangle = \underline{\underline{-11}} \neq 0$$, tehát lin. független.

$$\underline{v}_2 \times \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 0 - (-1)\cdot 0 \\ (-1)\cdot 1 - 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 - 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_1 \cdot (\underline{v}_2 \times \underline{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-3) = \underline{\underline{-11}}$$

Bázist alkotnak, mert lineárisan független!

4. Feladat

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{\underline{\underline{3\times 5}}} \qquad \underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\underline{\underline{5\times 3}}}$$

tükrözés - flip

5. Feladat

a) $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8 & 13 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}}}$

b) $2\underline{\underline{A}}+3\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 14 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 24 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 22 & 34 & 8 \\ 17 & 6 & 15 \end{bmatrix}}}$

c) $3\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{C}} = 3\,\underline{\underline{A}}_{2\times3} + \underline{\underline{C}}_{3\times2}$ ↯ nem végezhető el!

d) $\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{B}}_{2\times3}\cdot\underline{\underline{A}}_{2\times3}}_{↯}$ ↯ nem végezhető el!

e) $\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}_{2\times3}\cdot\underline{\underline{C}}_{3\times2} =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12-24+2 & 12+56+6 \\ 2-6+3 & 2+14+9 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -10 & 74 \\ -1 & 25 \end{bmatrix}}}$$

f) $2\cdot\underline{\underline{A}}+3\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}} = 2\cdot\underline{\underline{A}}_{2\times3} + 3\left(\underline{\underline{B}}_{2\times3}\cdot\underline{\underline{C}}_{3\times2}\right)_{2\times2} =$ ↯

nem végezhető el!

6. Feladat

a) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 0 & 4 \end{array} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

b) $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; 2+4 = \underline{\underline{6}}_{1\times 1}$$

7. Feladat

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T\right)}_{\text{Szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T\right)}_{\text{Antiszimmetrikus}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 10 \\ -5 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}_s = \frac{1}{2} \cdot \left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -5 & 12 \\ -5 & 8 & 15 \\ 12 & 15 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 6 \\ -5/2 & 4 & 15/2 \\ 6 & 15/2 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{A}}_{as} = \frac{1}{2} \cdot \left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -5 & -8 \\ 5 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -5/2 & -4 \\ 5/2 & 0 & -1/2 \\ 4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}}}$$

8. Feladat

a)

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2X2-es mátrixoknál főátló elemeit összeszorozzuk, majd kivonjuk a mellékátló elemeinek szorzatát.

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{(2\cdot 0)}_{\text{főátló}} - \underbrace{(3\cdot 1)}_{\text{mellékátló}} = \underline{\underline{-3}}$$

b)

$$\det\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

<u>Gyakvezeknek</u>: Még a Sarrus-szabályt következő héten vesszük. Így kofaktor/Minor módszer vagy elemi sor és oszlop műveletek! Ezek 3X3-as mátrixok det számolásához.

<u>Kofaktor/Minor módszer</u>: (Laplace kifejtés)

$$\det(A) = a_{11}\cdot C_{11} + a_{21}\cdot C_{21} + a_{31}\cdot C_{31}$$
$$= a_{11}\cdot M_{11} - a_{21}\, M_{21} + a_{31}\, M_{31}$$

Ez az első oszlopra van kifejtve, de lehet bármelyikre.

$$\det\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}_{2X2} - 3\cdot\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}_{2X2} + 8\cdot\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}_{2X2}$$

$$= 4\cdot(30-7) - 3\cdot(54-2) + 8\cdot(63-10) = \underline{\underline{360}}$$

8. Feladat folyt.

b) Elemi sor és oszlopműveletek

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[S_{3-1}(-2)]{} \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -17 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[S_{1-2}(-1)]{} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -17 & 2 \end{vmatrix}$$

3. sorból kivonjuk az 1. sor -2-szeresét!

$$\xrightarrow[S_{2-1}(-3)]{} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -7 & 22 \\ 0 & -17 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[S_{3-2}(-17/7)]{} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & -\frac{22 \cdot 17}{7}+2 \end{vmatrix}$$

Trianguláris mátrixot kaptunk. főátló elemeinek szorzata a determináns.

$$\det = 1 \cdot (-7) \cdot \left(-\frac{22 \cdot 17}{7} + 2\right) = \underline{\underline{360}}$$

c) Nagyobb dimenziójú mátrixok determinás számolásához is ezeket a módszereket alkalmazzuk.

Vizsga tipp:
- Két oszlop megegyezik, akkor det = 0.
- Nem változik a determináns, ha az egyik oszlopból egy másik oszlop skalárral vett szorzatát levonjuk / hozzáadjuk.
- Egyik oszlop a nullvektor, akkor det = 0.
- A determináns akkor és csak akkor 0, ha a vektorok lin. függőek.

8. Feladat folyt.

c)

sor x oszlop

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} = a_{11}\cdot M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - a_{14}\cdot M_{14}$$

Itt az M_{ij} 3X3-as mátrixok determinánsait újra kell számolni, mint a b) feladatban.

$\det(M_{11}) = -8$ $\det(M_{12}) = -4$ $\det(M_{13}) = -4$

$\det(M_{14}) = 0$

$$\det(A) = 3\cdot(-8) - 8\cdot(-4) + 6\cdot(-4) - 3\cdot(0) = \underline{\underline{-16}}$$

d) Mivel trianguláris mátrix, így a főátló elemeinek szorzata lesz a determináns.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

9. Feladat

$$7 \,\Big|\, \det\begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[O_{3+2}(10)]{O_{3+1}(100)} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 637 \\ 3 & 4 & 343 \\ 7 & 3 & 735 \end{vmatrix}$$

3. oszlop minden eleme osztható 7-el

$$7\cdot\begin{bmatrix} 6 & 3 & 91 \\ 3 & 4 & 49 \\ 7 & 3 & 105 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Osztható 7-el.}$$

Ellenőrzés:

$\det = -49 \rightarrow 7 \mid \underline{\underline{-49}}$ ✓