13 Integrálszámítás III

Matematika G1 – Integrálszámítás

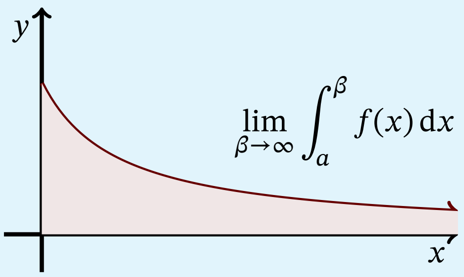
Utoljára frissítve: 2024. november 11.

13.1. Elméleti Áttekintő

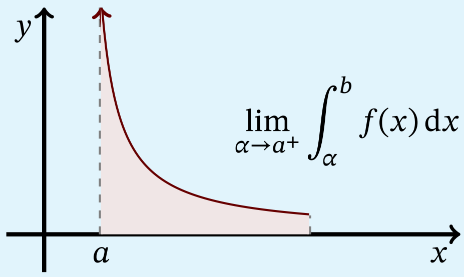
Improprius integrál:

A Riemann-integrál definíció szerint akkor használható, hogyha az integrációs intervallum véges, valamint ezen intervallumon az integrálandó függvény is korlátos. Előfordulhat azonban olyan eset, hogy

- végtelen tartományon szeretnénk integrálni,
- az integrálandó függvény nem korlátos az integrálási tartományban.



Végtelen tartomány



Nem korlátos függvény

Ezekben az esetekben az improprius integrált hívhatjuk segítségül.

Ívhossz számítása integrálással:

Egy görbét háromféleképpen is definiálhatunk:

- explicit alakban: $y = f(x)$,
- paraméteres alapban: $x = x(t)$, $y = y(t)$,
- polárkoordináta-rendszerben: $r = r(\varphi)$.

Az ívhossz számítására az alábbi képletet használhatjuk:

- explicit: $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$
- paraméteres: $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$
- polár: $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)}\,d\varphi$

Forgástestek térfogata és felszíne:

Egy görbe x tengely körüli megforgatásával egy forgástestet kapunk.

explicit: $$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

paraméteres: $$V = \pi \int_a^b y^2(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t \qquad A = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Fontos figyelembe venni, hogy a fenti képletek csak a forgástestek palástjának felszínét adják eredményül.

Abban az esetben, hogyha például egy csonkakúpnak a felszínét szeretnénk meghatározni, akkor az alsó és felső alapok felületét hozzá kell adni az előbbi képletekkel kapott eredményhez.

Görbeív súlypontja:

Egy konstans sűrűségű görbe súlypontjainak koordinátáit az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

explicit: $$S_x = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \qquad S_y = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

paraméteres: $$S_x = \frac{1}{L}\int_a^b x(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t \qquad S_y = \frac{1}{L}\int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Görbe által meghatározott síktartomány súlypontja:

Egy görbe és az x tengely által meghatározott síktartomány súlypontjainak koordinátáit az alábbi képletekkel számíthatjuk ki:

explicit: $$S_x = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \qquad S_y = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

paraméteres: $$S_x = \frac{\displaystyle\int_a^b x(t)\,y(t)\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b y(t)\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t} \qquad S_y = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b y^2(t)\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b y(t)\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t}$$

13.2. Feladatok

1. Milyen a és b paraméterek választása esetén lesz az adott integrál értéke minimális?

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)\,\mathrm{d}x$$

2. Határozza meg az alábbi határozott integrálok értékeit!

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$

3. Adja meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéjének ívhosszát az $x \in [0, 2]$ intervallumon!

4. Számítsa ki a ciklois egy ívének hosszát! ($x(t) = a \cdot (t - \sin t)$, $y(t) = a \cdot (1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$)

5. Számítsa ki annak a csonkakúpnak a térfogatát, melynek alapja egy $R = 5$ sugarú kör, teteje egy $r = 2$ sugarú kör, magassága pedig $h = 6$!

6. Vezesse le a gömb térfogatának képletét!

7. Adja meg az $f(x) = x^3$ görbe, valamint az $y = 0$ és $x = 1$ egyenesek által határolt rész súlypontjának koordinátáit!