Matematika G1- GY9 Sándor Tibor

1. feladat

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-9}$$

1, $\mathcal{D}_f$: $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-9} = \frac{2x^2}{(x+3)(x-3)}$

nevező $\neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \wedge x \neq 3$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; +3\}$

Zérushelyek: $f(x) = 0$

nevező $\neq 0 \Rightarrow$ számláló $= 0 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Periodicitás: nem periodikus

Paritás: $f(x) = f(-x) \sim$ páros (y tengelyre szimmetrikus)
$f(x) = -f(-x) \sim$ páratlan (origóra szimmetrikus)

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2-9} = \frac{2x^2}{x^2-9} = f(x) \Rightarrow \text{páros}$$

↳ elég csak az $x \geq 0$ pontokat vizsgálni

Nevezetes határértékek:

↳ $\pm\infty$-ben: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-9} = 2$

↳ szakadási pontokban:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to +3^+} f(x) = \lim_{x \to +3^+} \frac{\overbrace{2x^2}^{\sim \text{korlátos}}}{\underbrace{(x+3)}_{\text{korlátos}}\underbrace{(x-3)}_{\to +0}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to +3^-} f(x) = \lim_{x \to +3^-} \frac{2x^2}{(x+3)\underbrace{(x-3)}_{\to -0}} = -\infty$$

2, $f'(x)$ vizsgálata

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-9) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{\cancel{4x^3} - 36x - \cancel{4x^3}}{(x^2-9)^2} = \frac{-36x}{(x^2-9)^2}$$

↳ monotonitás $\quad f'(x) > 0 \sim$ nő

$\qquad\qquad\qquad\quad f'(x) < 0 \sim$ csökken

$f'(x) < 0$, ha $x > 0 \to$ monoton csökken

$f'(x) > 0$, ha $x < 0 \to$ monoton nő

↳ szélsőértékek $\quad f'(x)$ előjelet vált

$f'(x) = 0 \to x = 0 \Rightarrow$ derivált $\oplus \to \ominus \Rightarrow$ lokális maximum

3, $f''(x)$ vizsgálata

$$f''(x) = \frac{-36(x^2-9)^2 - (-36x)\cdot 2(x^2-9)2x}{(x^2-9)^4} = \frac{36(x^2-9)\overbrace{[-(x^2-9) + x \cdot 2 \cdot 2 \cdot x]}^{-x^2+9+4x^2 = 3(x^2+3)}}{(x^2-9)^4}$$

$$= \frac{108(x^2-9)(x^2+3)}{(x^2-9)^4}$$

↳ konvexitás/konkávitás $f''(x) > 0$ ~ konvex (∪)
$f''(x) < 0$ ~ konkáv (∩)

$f''(x)$ előjelét az (x^2-9)-es tag előjele dönti el

$x \in (-3;3) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ konkáv

$x \in \mathbb{R} \setminus [-3;3] \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ konvex

↳ inflexiós pontok: $f''(x)$ előjelet vált

nincs inflexiós pont $(x \neq \pm 3)$

4, aszimptoták keresése:

↳ függőleges: $x = 3$ és $x = -3$ $\left(\lim\limits_{x \to \pm 3^{\pm}} f(x) = \pm\infty\right)$

↳ vízszintes: $y = 2$ $\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2\right)$

↳ ferde: $y = mx + b$ alak

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2-9} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-9} = 2$$

↳ Visszakaptuk a vízszinteset

5, Táblázat készítése

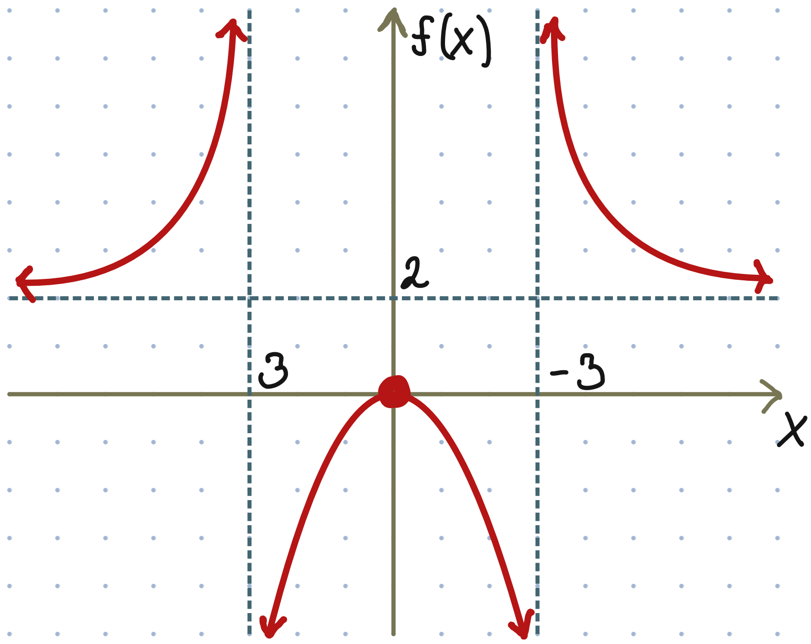
	(-∞;-3)	-3	(-3;0)	0	(0;+3)	+3	(+3;+∞)
$f'(x)$	+		+	0	−		−
$f''(x)$	+		−	−	−		+
$f(x)$	↗		↗	0: max	↘		↘
	U és ↗		∩ és ↗		∩ és ↘		U és ↘

Grafikon

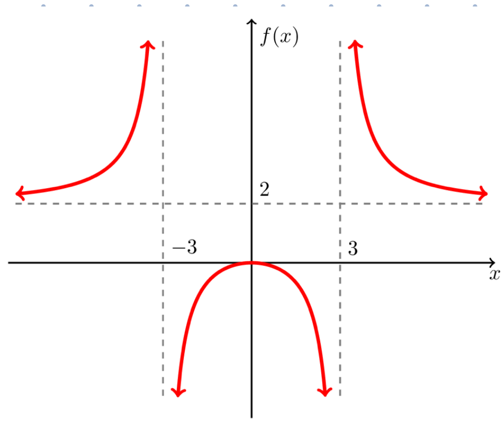
↳ jelleghelyes

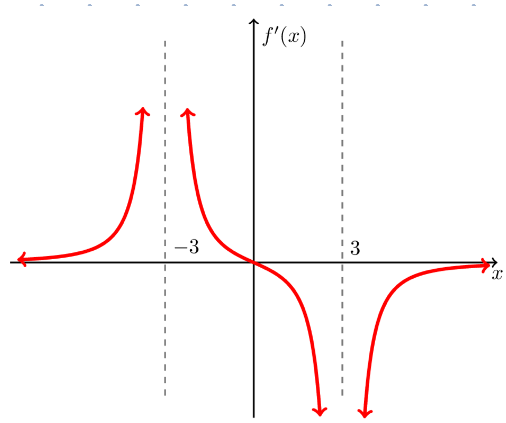
↳ aszimptoták

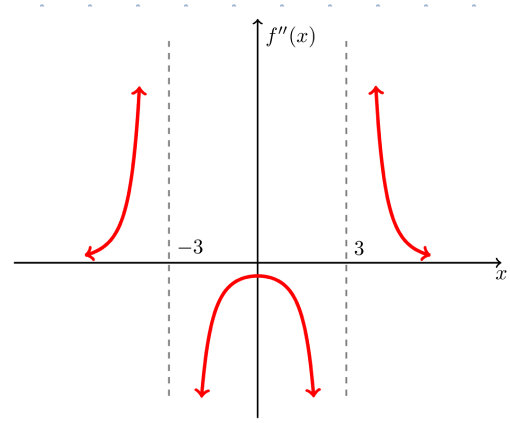
↳ szélsőértékek



Értékkészlet leolvasása $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$







2. feladat

1 literes legkisebb felszínű, felül nyitott henger

$V = 1dm^3 = r^2 \pi h$

$A = 2r\pi h + r^2\pi$

Minimalizálandó: A (felszín)

Változó: r (sugár)

Összes többi változó kifejezése r segítségével:

$V = r^2 \pi h \to h = \frac{V}{r^2\pi} = \frac{1}{r^2\pi}$

$A(r) = 2r\pi \frac{1}{r^2\pi} + r^2\pi = \frac{2}{r} + r^2\pi$

$A'(r) = \frac{-2}{r^2} + 2r\pi = 0$

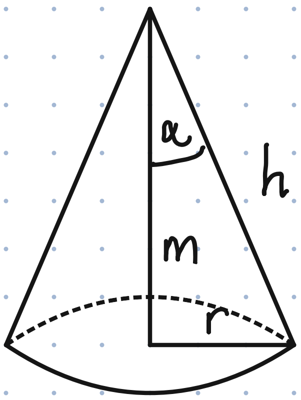
$r^3 = 1/\pi$

$r = \pi^{-1/3} \to h = \frac{1}{r^2\pi} = \pi^{-1}\pi^{2/3} = \pi^{-1/3}$

Ellenőrzés: $A''(r) = \frac{4}{r^3} + 2\pi$

$A''(\pi^{-1/3}) = 4\pi + 2\pi = 6\pi \neq 0$ ✓

3. feladat Legnagyobb térfogatú, h alkotójú kúp



$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} r^2 \pi m \\ r &= h \sin\alpha \\ m &= h \cos\alpha \end{aligned}\right\} \begin{aligned} V(\alpha) &= \frac{\pi}{3} h^2 \sin^2\alpha \, h \cos\alpha \\ V(\alpha) &= \frac{\pi}{3} h^3 \sin^2\alpha \cos\alpha \end{aligned}$$

$$V'(\alpha) = \underbrace{\frac{\pi}{3} h^3}_{\neq 0} \left(2 \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha\right) = 0$$

$$\underbrace{\sin\alpha}_{\neq 0} \left(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0$$

$$2(1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 0$$

$$2 = 3\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

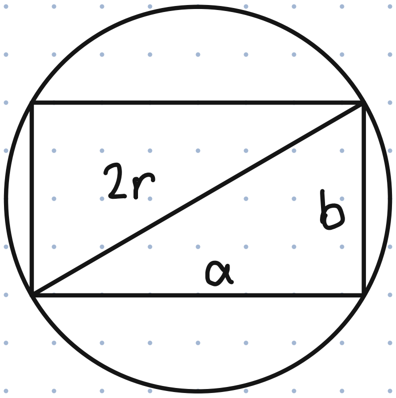
$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= h \cdot \sin\alpha = h\sqrt{2/3} \\ m &= h \cdot \cos\alpha = h\sqrt{1/3} \end{aligned}\right\} \quad V = \frac{\pi}{3} h^3 \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} h^3$$

Ellenőrzés: $f(\alpha) = 2 - 3\sin^2\alpha$ szigorúan monoton az

$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$ környezetében

4. feladat   r sugarú körbe írható legnagyobb b négyszög



$T = ab$

$a^2 + b^2 = (2r)^2 = 4r^2$

$b^2 = 4r^2 - a^2$

$b = \sqrt{4r^2 - a^2}$

$T(a) = a\sqrt{4r^2 - a^2}$

$T'(a) = \sqrt{4r^2 - a^2} + a\frac{-\cancel{2}a}{\cancel{2}\sqrt{4r^2 - a^2}} = \sqrt{4r^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = 0$

$4r^2 - a^2 - a^2 = 0$

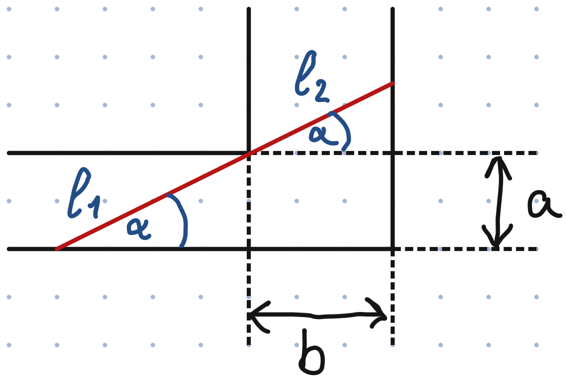
$a^2 = 2r^2$

$\underbrace{a = \sqrt{2}r \quad b = \sqrt{2}r}_{\text{négyzet}}$

$T = a^2 = 2r^2$

Ellenőrzés: $T'(a) = \frac{4r^2 - 2a^2}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$ előjelet vált ✓

5. feladat



Keressük azt az α szöget, ahol $\ell_1+\ell_2$ hossz minimális

$$\ell_1 = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad \ell_2 = \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$\ell(\alpha) = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$\ell'(\alpha) = \frac{-a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{b\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{-a\cos^3\alpha + b\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 0$$

$$\tan^3\alpha = \frac{a}{b} \rightarrow \tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

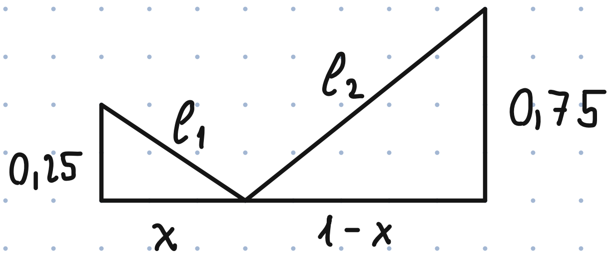
Azonosságok: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha \qquad (\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha)$

$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\cot^2\alpha \qquad (\csc^2\alpha = 1+\cot^2\alpha)$

$$\left.\begin{aligned} \ell_1 &= a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}} = a^{2/3}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}} \\ \ell_2 &= b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2/3}} = b^{2/3}\sqrt{b^{2/3}+a^{2/3}} \end{aligned}\right\} \ell = \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$$

Ellenőrzés $\ell'(\alpha)$ szig mon ✓

6. feladat



$$\ell_1 = \sqrt{x^2 + 0{,}25^2}$$

$$\ell_2 = \sqrt{(1-x)^2 + 0{,}75^2}$$

$$\ell(x) = \ell_1 + \ell_2$$

$$\ell(x) = \sqrt{x^2 + 0{,}25^2} + \sqrt{(1-x)^2 + 0{,}75^2}$$

$$\ell'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 0{,}25^2}} + \frac{-\cancel{2}(1-x)}{\cancel{2}\sqrt{(1-x)^2 + 0{,}75^2}} = 0$$

$$x\sqrt{(1-x)^2 + 0{,}75^2} = (1-x)\sqrt{x^2 + 0{,}25^2}$$

$$x^2(1 - 2x + x^2 + 0{,}75^2) = (1 - 2x + x^2)\,(x^2 + 0{,}25^2)$$

$$x^2 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}25^2 - 2 \cdot 0{,}25^2 x + 0{,}25^2 x^2$$

$$\frac{9}{16}x^2 = \frac{1}{16} - \frac{2}{16}x + \frac{1}{16}x^2$$

$$8x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$(4x - 1)(2x + 1) = 0$$

$x = 1/4$ (nem lehet negatív)

$$\ell_1 = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\ell_2 = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

Ell.: $\ell(x)$ előjelet vált ✓