7 Differenciálás I

Matematika G1 – Kalkulus

Utoljára frissítve: 2024. október 19.

7.1. Elméleti Áttekintő

Definíció 7.1: Differenciálhányados

Ha létezik és véges a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték, akkor azt az f függvény a pontbeli differenciálhányadosának, vagy az a pontbeli deriváltjának mondjuk.

Jelölése:

$$f'(a) \quad \text{vagy} \quad \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}.$$

A differenciálhányados létezésének **szükséges feltétel**e, hogy az f függvény **folytonos** legyen az a pontban.

Fontosabb függvények és deriváltjaik:

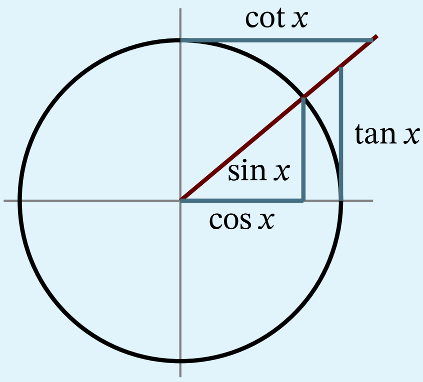
$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{x^{1/n-1}}{n}$

A konstans függvény deriváltja zérus.

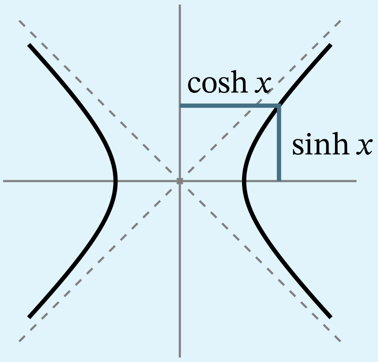
Trigonometrikus függvények és deriváltjaik:



$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Hiperbolikus függvények és deriváltjaik:



$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{arsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\operatorname{arcosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(x > 1)$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{artanh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$(\lvert x\rvert < 1)$
$\coth x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$\operatorname{arcoth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$(\lvert x\rvert > 1)$

Hiperbolikus azonosságok:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = -i\sin(ix) \qquad \cosh x = \cos(ix)$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2} \qquad \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$$

Műveleti szabályok:

- **Konstans kiemelhető:** $(cf)' = cf'$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf)) = c\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$
- **Összeg- és különbségfüggvény:** $(f \pm g)' = f' \pm g'$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \pm g) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \pm \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
- **Szorzatfüggvény:** $(fg)' = f'g + fg'$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g + f\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$
- **Hányadosfüggvény:** $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g - f\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2}$

Láncszabály:

A láncszabály segítségével összetett függvényeket tudunk differenciálni. Az összefüggést három különböző jelölésmóddal is felírhatjuk:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{vagy} \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad \text{vagy} \quad \frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

Elemi átalakításos módszer:

Előfordulhat olyan eset, hogy $(f(x))^{g(x)}$ alakú függvényeket kell differenciálni. Ebben az esetben az alábbi átalakítást alkalmazzuk:

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Az $e^{g(x)\ln f(x)}$ függvény deriváltja a láncszabály segítségével:

$$\begin{aligned}\left((f(x))^{g(x)}\right)' &= \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' \\ &= e^{g(x)\ln f(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= (f(x))^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).\end{aligned}$$

Határozzuk meg az $\ln^x x$ függvény deriváltját!

Az $\ln^x x$ függvényt $e^{x\ln\ln x}$ alakra hozva, a láncszabály segítségével differenciálható:

$$\begin{aligned}\left(\ln^x x\right)' &= \left(e^{x\ln\ln x}\right)' \\ &= e^{x\ln\ln x}\left(\ln\ln x + x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right) \\ &= \ln^x x\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right).\end{aligned}$$

Geometriai alkalmazás:

Az f függvény a pontbeli **érintőjének egyenlete** onnan következik, hogy $f' = m$, ahol m a meredekséget jelöli, az $y = m\cdot x + b$ egyenes egyenletéből levezetve:

$$f(a) = f'(a)\cdot a + b \quad\rightarrow\quad b = f(a) - f'(a)\cdot a,$$

és mivel

$$\begin{gathered}(a; f(a)) \in y = m\cdot x + b \\ \downarrow \\ y = f'(a)\cdot x + f(a) - f'(a)\cdot a\end{gathered}$$

Ebből átalakítva:

$$\boxed{y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a).}$$

Az $(a; f(a))$ pontbeli **normális egyenlete**:

$$M = \frac{-1}{f'(a)}, \quad \text{és} \quad (a; f(a)) \in y = M\cdot x + B,$$

$$\boxed{y = \frac{-1}{f'(a)}\cdot(x-a) + f(a).}$$

7.2. Feladatok

1. A differenciálhányados definíciója segítségével határozza meg az $f(x) = x^n$ függvény deriváltját az $x = x_0$ pontban!

2. Differenciálhatóak-e az alábbi függvények az $x_0 = 0$ pontban?

   a) $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^3 + x + 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

3. Adjon példát olyan függvényekre, melyek $\forall x \in \mathbb{R}$ valós számra értelmezve vannak és teljesül, hogy ...

   a) f mindenhol folytonos, de az $x_0 = 1$ pontban nem differenciálható,

   b) f mindenhol differenciálható, de az $x_0 = 1$ pontban nem folytonos,

   c) f mindenhol differenciálható és f' is folytonos,

   d) f mindenhol differenciálható, de f' az $x_0 = 0$ pontban nem az.

4. Mutassa meg, hogy az alábbi függvényre igaz, hogy bár differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, viszont létezik az x_0 tetszőlegesen kis környezetében olyan pont, ahol nem differenciálható.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\sin {}^1\!/_x\right|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

5. Differenciálja az alábbi függvényeket!

   a) $f(x) = (6x^7 + 7x^4 + 2x^2)^5 + \sin^2 x + \cos^2 x$

   b) $g(x) = \ln x \cdot e^x + x^2 \cot x + x^{-1/3}$

   c) $h(x) = \dfrac{(3x + x^2) \cdot \sinh x \cdot \arctan x}{(1 + \cos x) \cdot \operatorname{artanh} \pi}$

   d) $i(x) = \sqrt[3]{\ln \cos^2 x^4}$

   e) $j(x) = \ln \arcsin \sqrt{\dfrac{x^2 + 3}{e^{2x}}}$

   f) $k(x) = x^x$

   g) $l(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$

6. Határozza meg az alábbi függvények n-edik deriváltját!

   a) $f(x) = x^m$

   b) $g(x) = \sin x$

7. Írja fel az $f(x) = 2x^3 + 3\sqrt{x} - {}^3\!/_{2x^2}$ függvény $x_0 = 1$ pontban lévő érintő egyenesének egyenletét! Adja meg az érintőre merőleges egyenes egyenletét is!

8. Határozza meg azon pontok halmazát, melyekben az $x^2 + y^2 = 25$ kör érintője párhuzamos a $3x - 4y + 7 = 0$ egyenessel.