

## 5

# Numerikus sorozatok II

Matematika G1 – Sorozatok

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

## 5.1. Feladatok

1. A konvergencia definíciója alapján bizonyítsa be, hogy az alábbi számsorozatok konvergensek, úgy hogy minden  $\varepsilon$  esetén adjon meg egy  $N$  közbüszámot, amelytől kezdve minden  $n > N$  esetén  $|a_n - a| < \varepsilon$ , ahol  $a$  az adott sorozat határértéke!

a)  $a_n = \frac{2n + 5}{n - 1}, \quad \varepsilon = 10^{-6}$

b)  $b_n = \frac{2n + 3\sqrt{n}}{3n + 1}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$

2. Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát!

a)  $a_n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

b)  $b_n = \frac{(-1)^n \cdot n + 2n}{3n} \cdot \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

3. Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi sorozatokat!

a)  $a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 - n + 1}$

b)  $b_n = \frac{n^5}{n!}$

4. Adja meg azon sorozat határértékét, melynek első eleme  $a_1 = 1$ ,  $n$ -edik eleme pedig  $a_n = a_{n-1} + 1/2^{n-1}$ .

5. Vizsgálja meg azt a sorozatot konvergencia, monotonitás és korlátosság szempontjából, amelynek első eleme  $a_1 = 1$ ,  $n$ -edik eleme pedig  $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$ .

6. Határozza meg az alábbi komplex elemű sorozatok határértékeit!

a)  $a_n = \frac{n^2 - i(n^2 - 1)}{n^2 - i}$

b)  $b_n = \frac{i^n}{3^n + i^n}$

c)  $c_n = (1 - i)^n$

7. Bizonyítsa be, hogy ha  $n \geq 3$ , akkor  $n^{n+1} \geq (n + 1)^n$ !

8. Vizsgálja az  $a_n = \binom{n}{2} / \binom{n}{3}$  sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!