

## 2

# Térgeometriai alakzatok

Matematika G1 – Analitikus geometria

Utoljára frissítve: 2024. szeptember 11.

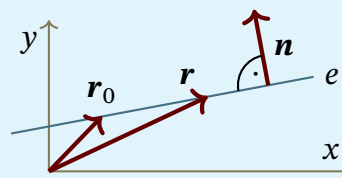
## 2.1. Elméleti Áttekintő

Egyenes 2D-ben:

$\mathbf{n}(A; B)$  – egyenes normálvektora

$\mathbf{r}(x; y)$  – tetszőleges pont helyvektora

$\mathbf{r}_0(x_0; y_0)$  –  $P_0$  fixpont helyvektora



Az egyenes egyenlete:

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}$$

$$Ax + By = \underbrace{Ax_0 + By_0}_{=:-C} \rightarrow Ax + By + C = 0$$

Hesse-féle normálalak:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

A Hesse-féle normálalakot úgy kapjuk, hogy az egyenes normálvektorát egység hosszúságúra normáljuk.

Két egyenes viszonya:

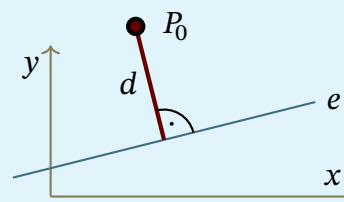
Két egyenes által **közbezárt szög** a két egyenes normálvektorai által bezárt szög.

Ebből következik, hogy ha a normálvektorok által bezárt szög  $90^\circ$ , akkor a két egyenes merőleges egymásra. Ha a normálvektorok párhuzamosak, akkor a két egyenes is párhuzamos.

Pont és egyenes távolsága:

Adott egy  $e$  egyenes Hesse-féle normálalakja és egy  $P_0(x_0; y_0)$  pont. Ekkor a pont és az egyenes távolsága:

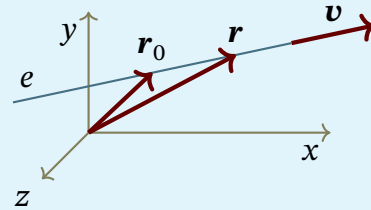
$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$



A formula csak azon pontokra ad zérus értéket, amelyek rajta vannak az egyenesen.

**Egyenes 3D-ben:**

- $\mathbf{v}(a; b; c)$  – egyenes irányvektora
- $\mathbf{r}(x; y; z)$  – tetszőleges pont helyvektora
- $\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - P_0$  fixpont helyvektora



**3D egyenes paraméteres alakja:**

- $\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - P_0$  fixpont helyvektora
  - $\mathbf{v}(a; b; c)$  – egyenes irányvektora
  - $t \in \mathbb{R}$  – paraméter
- $$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases}$$

A paraméteres egyenletekből  $t$ -t kifejezve is megadhatjuk az egyenest:

$$(t = ) \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

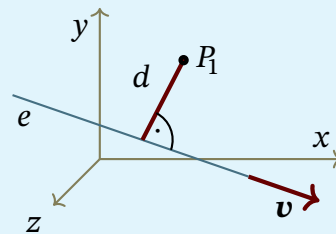
**Két egyenes viszonya:**

Két egyenes által közbezárt szög a két egyenes irányvektorai által bezárt szög.

**Pont és egyenes távolsága:**

Egy  $\mathbf{r}_1$  irányvektorú  $P_1$  pont, és egy  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$  egyenletű egyenes távolsága

$$d = \left| \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{v}|} \right|$$



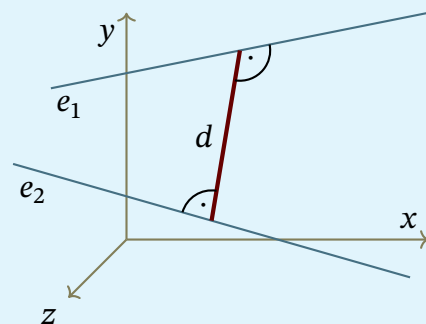
**Két egyenes távolsága:**

Az  $e_1 : \mathbf{p}_1(t_1) = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{v}_1$  és  $e_2 : \mathbf{p}_2(t_2) = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{v}_2$  egyenesek távolsága

$$d = \left| (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \underbrace{\frac{(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}}_{\hat{\mathbf{n}}_T} \right| = |(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_T|,$$

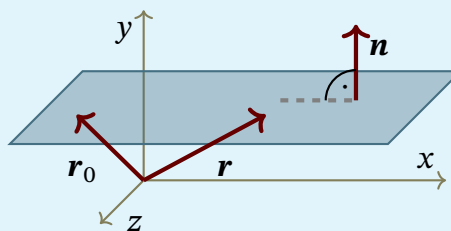
ahol  $\hat{\mathbf{n}}_T$  egy olyan egységvektor, amely merőleges mindkét egyenesre. (normál transzverzális)

Amennyiben  $e_1$  és  $e_2$  párhuzamosak, akkor a távolságukat a pont és egyenes távolságának képletével számolhatjuk.



**Sík 3D-ben:**

- $\mathbf{n}(A; B; C)$  – sík normálvektor
- $\mathbf{r}(x; y; z)$  – tetszőleges pont helyvektora
- $\mathbf{r}_0(x_0; y_0; z_0) - P_0$  fixpont helyvektora



**Sík egyenlete:**

A sík tetszőleges  $\mathbf{r}$  pontjára igaz, hogy

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} =: -D, \\ Ax + By + Cz + D &= 0. \end{aligned}$$

**Hesse-féle normálegyenlet:**

$$\left| \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = 0$$

**Két sík viszonya:**

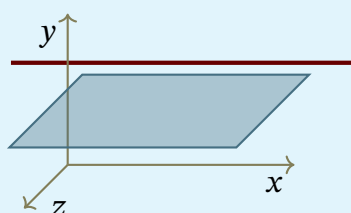
Két sík által bezárt szög a síkok normálvektorai által bezárt szög.

**Sík és egyenes dőléspontja:**

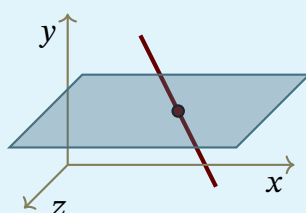
Egy  $s : Ax + By + Cz + D = 0$  sík és egy  $e : \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$  egyenes dőléspontjait meghatározhatjuk, ha megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{és} \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

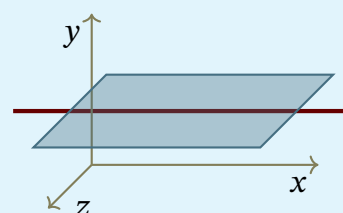
A megoldások száma alapján:



0 megoldás



1 megoldás



$\infty$  megoldás

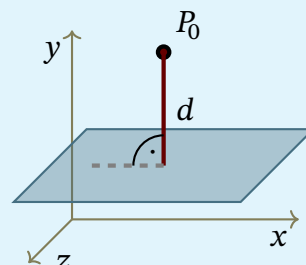
**Sík és egyenes által bezárt szög:**

Egy sík és egy egyenes által bezárt szög a sík normálvektora és az egyenes irányvektora által bezárt szöggel egyenlő.

**Sík és pont távolsága:**

Egy  $P_0(x_0; y_0; z_0)$  pont és egy  $s : Ax + By + Cz + D = 0$  sík távolsága:

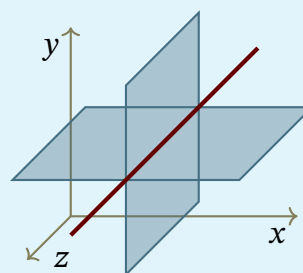
$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

**Két sík metszésvonala:**

A metszésvonal irányvektora mindkét sík normálvektorára merőleges:

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.$$

Ezen kívül szükségünk van még egy tetszőleges pontra, amely rajta van mindkét síkon. Ezt megkaphatjuk úgy, hogy az egyik koordinátát fixáljuk, és a másik kettőt kiszámítjuk a 2 sík egyenletéből. (Pl.  $z = 0$ )



## 2.2. Feladatok

1. Számítsa ki az  $e_1 : 3x - 4y - 10 = 0$  és az  $e_2 : 6x - 8y + 5 = 0$  egyenes távolságát!
2. Írja fel azon egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P(-2; 5; 6)$  és a  $Q(7; -1; 3)$  pontokon!
3. Határozza meg az  $\alpha$  paramétert, ha ismert, hogy az alábbi egyenesek metszik egymást!

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \qquad \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

4. Határozza meg az alábbi egyenesek távolságát!

$$\begin{cases} x_1(t) = 2 + 3t_1 \\ y_1(t) = -1 + 4t_1 \\ z_1(t) = 2t_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = 7 + 6t_2 \\ y_2(t) = 1 + 8t_2 \\ z_2(t) = 3 + 4t_2 \end{cases}$$

5. Adott két egyenes. Határozza meg a távolságukat és normáltraszverzálisuk egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x_1(t) = -7 + 3t \\ y_1(t) = 4 - 2t \\ z_1(t) = 4 + 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = 1 + t \\ y_2(t) = -8 + 2t \\ z_2(t) = -12 - t \end{cases}$$

6. Vizsgálja meg, hogy a  $P(0; -1; 2)$ , a  $Q(2; -1; 1)$  és az  $R(4; 3; -2)$  pontok egy egyenesbe esnek-e! Ha nem, akkor írja fel az általuk kifeszített sík egyenletét!
7. Határozza meg az  $\alpha$  paramétert, ha ismert, hogy az  $e$  egyenes és az  $s$  sík párhuzamos egymással!

$$e : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{\alpha} \qquad s : x + 3y - 2\alpha z = 0$$

8. Számítsa ki az  $e$  egyenes és az  $s$  sík metszéspontját!

$$e : x - 1 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \qquad s : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

9. Adja meg az  $s_1$  és  $s_2$  síkok metszésvonalának egyenletrendszerét!

$$s_1 : x - 2y + 3z - 4 = 0 \qquad s_2 : 3x + 2y - 5z - 4 = 0$$

10. Igazolja, hogy az alábbi három síknak egy közös pontja van. Írja fel ezen a ponton átmenő síkot, amely párhuzamos az  $x + y + 2z = 0$  síkkal!

$$\begin{cases} s_1 : 2x + y - z - 2 = 0 \\ s_2 : x - 3y + z + 1 = 0 \\ s_3 : x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$